Laboratorio: Una capa para Gastón

**Objetivos**

En esta actividad vas a conseguir poner en práctica diferentes técnicas para aproximar numéricamente las integrales.

**Descripción**

Gastón (ver Figura 1) es una mariquita que vive en el maravilloso reino de Ben y Holly.

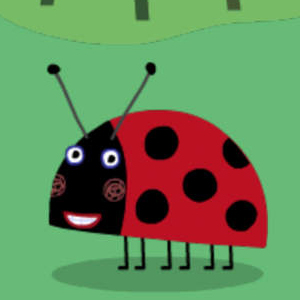


Figura 1. Gastón. Fuente: <https://images.app.goo.gl/be4ssz3Zs7fGztup8>

En unos días va a recibir la vista de los Reyes Caléndula y tiene que hacerse una capa para cubrir su parte roja.

Ayúdale resolviendo los siguientes problemas.

Problema 1

Una de las medidas que Gastón necesita conocer es la longitud de la curva en azul de la Figura 2.

La longitud de una curva viene dada por

Gráfico

Descripción generada automáticamente

Figura 2. Vista lateral de Gastón. Fuente: elaboración propia.

Sabiendo que , es fácil demostrar que la longitud se obtiene como

Tomando , calcula la longitud de la curva azul con los métodos de trapecios con , Simpson con y Gauss-Legendre con .

Solución:

Como vamos a trabajar con los programas que nos da el Capítulo 5, vamos a ver las variables de entrada que necesitamos, además de las propias que nos da el enunciado. Tenemos así que el nodo inferior es , el nodo superior es y la función con la que trabajaremos este ejercicio es

Esto lo introducimos en matlab mediante los comandos:

R=56; a=-R/2; b=9\*R/10; nTrap=8; nSimps=8; nGL=3;

f=@(x) 1./sqrt(1-(x/R).^2);

Para calcular la longitud mediante el método de los trapecios, tenemos la función *trapecios.m* obtenida de los apuntes del tema 5:

function I= trapecios(f,a,b,n)

% I=trapecios(f,a,b,n) obtiene la integral de f(x)

% con la fórmula de trapecios compuesta.

h =(b-a)/n; %defino el paso h a partir de los valores a, b y n

x = a:h:b; %defino los valores de esta variable

pesos = [1 2\*ones(1,n -1) 1]; %pesos asociados a primera variable

%integral obtenida de plantear la funcion de los apuntes

I=h/2\*sum(pesos.\*f(x));

end

Así, introduciendo en esta el valor de la función anónima, el valor de los dos nodos y como lTrap=trapecios(f,a,b,nTrap) obtenemos:

Análogamente, para calcular la longitud mediante el método de Simpson, tenemos la función *simpsons.m* obtenida de los apuntes del tema 5:

function I= simpson (f,a,b,n)

% I=simpson(f,a,b,n) obtiene la integral de f(x)

% con la fórmula de Simpson compuesta.

h =(b-a)/n; %defino el paso h a partir de los valores a, b y n

x = a:h:b; %defino los valores de esta variable

pesos = ones(1,n +1);%pesos asociados a primera variable

pesos(2:2: n) = 4; pesos(3:2:n -1) = 2;

%integral obtenida de plantear la funcion de los apuntes

I=h/3\*sum(pesos.\*f(x));

end

Así, introduciendo en esta el valor de la función anónima, el valor de los dos nodos y como lSimps=simpsons(f,a,b,nSimps) obtenemos:

De igual modo, para calcular la longitud mediante el método de Gauss-Legendre, tenemos la función *xcGaussLegendre.m* obtenida de las lecciones magistrales del tema 5:

function [xi, ci] = xcGaussLegendre(n)

% funcion [xi, ci] = xcGaussLegendre(n)

%Obtiene los coeficientes ci y los nodos xi de la cuadratura

%de Gauss-Legendre para un valor de n dado como parámetro de entrada

syms x %utilizamos una variable simbolica

p{1}=1; %creamos el primer polinomio p0(x)

p{2}=x; % creamos el segundo polinomio p1(x)

%Creamos el resto de polinomios de manera recursiva conociendo los dos

%anteriores implementando la ecuacion de los apuntes

for k=1:n-1

p{k+2}=1/(k+1)\*((2\*k+1)\*x\*p{k+1}-k\*p{k});

end

%Resolviendo el ultimo polinomio obtenido podemos sacar las raices que

%buscabamos

xi=double(solve(p{n+1}==0, x));

dpn=diff(p{n+1}); %derivamos el ultimo polinomio

%sacamos los coeficientes implementando al ecuacion de clase

ci=double(2./(1-xi.^2)./subs(dpn,x,xi).^2);

end

En este caso, primero sacamos los coeficientes y los nodos de la cuadratura de Gauss-Legendre para mediante [xi,ci]=xcGaussLegendre(nGL). Como en este método trabaja con los nodos [-1,1], aplicamos el cambio de variable correspondiente:

Hacemos lo mismo con los coeficientes:

Implementado este cambio de variable queda:

xPrima=(b-a)\*xi/2+(b+a)/2;

cPrima=(b-a)/2\*ci';

E introduciendo estos valores como lGL=cPrima\*f(xPrima) obtenemos:

Además, podemos calcular el valor analítico de la longitud lanalitica=integral(f,a,b) cuyo valor es:

Y a partir de esto, podemos calcular el error porcentual de cada método:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Trapecio | Simpson | Gauss-Legendre |
|  | 1.613605 | 0.316151 | 0.860625 |

A partir del error podemos ver que la aproximación que más se ajusta al valor de la función analítica es mediante el método de Simpsons.

Problema 2

Para la presentación de Gastón habrá un foco de luz que apunte directamente a la capa, es decir, a la parte roja de la Figura 2. Es por ello por lo que necesitamos conocer su área.

Sabiendo que podemos calcular el área como

Calcula el área tomando con los métodos de trapecios con , Simpson con y Gauss-Legendre con .

Solución:

Como vamos a trabajar también con los programas que nos da el Capítulo 5, vamos a ver las variables de entrada que necesitamos, además de las propias que nos da el enunciado. Tenemos así que el nodo inferior es , el nodo superior es y la función con la que trabajaremos este ejercicio es

Esto lo introducimos en matlab mediante los comandos:

R=56; a=-R/2; b=9\*R/10; nTrap=8; nSimps=8; nGL=3;

f=@(x) sqrt(R^2-x.^2);

Para calcular el área mediante el método de los trapecios, tenemos la función *trapecios.m* obtenida de los apuntes del tema 5 y que es la misma que en el ejercicio 1. Así, introduciendo en esta el valor de la función anónima, el valor de los dos nodos y como ATrap=trapecios(f,a,b,nTrap) obtenemos:

Análogamente, para calcular el área mediante el método de Simpson, tenemos la función *simpsons.m* obtenida de los apuntes del tema 5 y vista en el ejercicio anterior. Así, introduciendo en esta el valor de la función anónima, el valor de los dos nodos y como ASimps=simpsons(f,a,b,nSimps) obtenemos:

De igual modo, para calcular el área mediante el método de Gauss-Legendre, tenemos la función *xcGaussLegendre.m* obtenida de las lecciones magistrales del tema 5 y ya descrita anteriormente. En este caso, primero sacamos los coeficientes y los nodos de la cuadratura de Gauss-Legendre para mediante [xi,ci]=xcGaussLegendre(nGL). Como en este método trabaja con los nodos [-1,1], aplicamos el cambio de variable correspondiente:

Hacemos lo mismo con los coeficientes:

Implementado este cambio de variable queda:

xPrima=(b-a)\*xi/2+(b+a)/2;

cPrima=(b-a)/2\*ci';

E introduciendo estos valores como AGL=cPrima\*f(xPrima) obtenemos:

Además, podemos calcular el valor analítico de la longitud Aanalitico=integral(f,a,b) cuyo valor es:

Y a partir de esto, podemos calcular el error porcentual de cada método:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Trapecio | Simpson | Gauss-Legendre |
|  | 0.533043 | 0.029402 | 0.108173 |

A partir del error podemos ver que la aproximación que más se ajusta al valor de la función analítica es mediante el método de Simpsons otra vez.

Problema 3

El día de la visita de los Reyes Caléndula se prevén lluvias, por lo que a Gastón le vamos a diseñar un paraguas como el de la Figura 3.

Imagen que contiene Diagrama

Descripción generada automáticamente

Figura 3. Paraguas para Gastón. Fuente: elaboración propia.

Queremos conocer el volumen del paraguas, que podemos calcular como

donde y es el círculo de radio . Haciendo el cambio de variables

La integral de volumen se transforma en

Tomando , calcula el volumen del paraguas utilizando el método de Trapecios con , el método de Simpson con y el método de Gauss-Legendre con .

Solución:

Dado que son variables independientes, podríamos separar la integral y la para obtener un problema de una variable tal que:

Sin embargo, queremos modificar los programas del Capítulo 5 para trabajar en 2 dimensiones, por lo que las variables que necesitamos, además de las propias que nos da el enunciado (nTrap=mTrap=nSimps=mSimps=8 y nGL=mGL=3), son los extremos de integración inferiores , y los superiores son y . Además, la función con la que trabajaremos este ejercicio es

Esto lo introducimos en matlab mediante los comandos:

R=56; a=0; b=R; c=0; d=2\*pi; nTrap=8; nSimps=8; nGL=3;

f=@(x,y) x.\*sqrt(R^2-x.^2).\* (1+0.\*y)'

g=@(x) x.\*sqrt(R^2-x.^2);

h=@(x) 1+0.\*x;

Para calcular el volumen mediante el método de los trapecios, tenemos la función *trapecios2.m* obtenida a partir de la modificación de la de los apuntes del tema 5 de una dimensión:

function I= trapecios2D (f,a,b,n,c,d,m)

% I=trapecios2D(f,a,b,n,c,d,m) obtiene la integral de f(x,y)

% con la fórmula de trapecios compuesta.

h=(b-a)/n; %defino el paso h a partir de los valores a, b y n

k=(d-c)/m; %defino el paso k a partir de los valores c, d y m

x=a:h:b; %defino los valores de la primera variable

y=c:k:d; %defino los valores de la segunda variable

pesos\_n = [1 2\*ones(1,n -1) 1]; %pesos asociados a primera variable

pesos\_m = [1 2\*ones(1,m -1) 1]; %pesos asociados a segunda variable

%matriz de pesos correspondiente al producto de los otros dos:

Pesos=pesos\_n.\*pesos\_m';

%integral obtenida generalizar la ecuación de 1 a 2 variables con las

%correspondientes matrices

I=h\*k/4\*sum(sum(Pesos.\*f(x,y)));

end

Así, introduciendo los valores mediante VTrap=trapecios2D(f,a,b,nTrap,c,d,nTrap) obtenemos:

Análogamente, para calcular el volumen mediante el método de Simpson, tenemos la función *simpsons2D.m* a partir de la modificación de la de los apuntes del tema 5 de una dimensión:

function I= simpson2D(f,a,b,n,c,d,m)

% I=simpson2D(f,a,b,n,c,d,m) obtiene la integral de f(x,y)

% con la fórmula de Simpson compuesta.

h=(b-a)/n; %defino el paso h a partir de los valores a, b y n

k=(d-c)/m; %defino el paso k a partir de los valores c, d y m

x=a:h:b; %defino los valores de la primera variable

y=c:k:d; %defino los valores de la segunda variable

pesos\_n = ones(1,n +1) ; %pesos asociados a la primera variable

pesos\_n(2:2: n) = 4; pesos\_n(3:2:n -1) = 2;

pesos\_m = ones(1,m +1) ; %pesos asociados a la segunda variable

pesos\_m(2:2: m) = 4; pesos\_m(3:2:m -1) = 2;

%matriz de pesos correspondiente al producto de los otros dos:

Pesos=pesos\_n.\*pesos\_m';

%integral obtenida generalizar la ecuación de 1 a 2 variables con las

%correspondientes matrices

I=h\*k/9\*sum(sum(Pesos.\*f(x,y)));

end

Así, introduciendo los valores mediante VSimps=simpson2D(f,a,b,nSimps,c,d,nSimps) obtenemos:

De igual modo, para calcular el volumen mediante el método de Gauss-Legendre, tenemos la función *xcGaussLegendre.m* obtenida de las lecciones magistrales del tema 5. En este caso, primero sacamos los coeficientes y los nodos de la cuadratura de Gauss-Legendre con [xi,ci]=xcGaussLegendre(nGL).

Como en este método trabaja con los nodos [-1,1] x [-1,1], aplicamos el cambio de variable correspondiente. Para ello, primero creamos la matriz de coeficientes como C=ci\*ci'.

A continuación, vamos a aplicar el cambio de variable a los nodos de cuadratura correspondientes en formato matricial de la primera variable, ya que la segunda no se ve reflejada en la función. Esto lo sacamos mediante:

U=repmat(xi,1,3);

UPrima=(b-a)/2\*U+(b+a)/2;

Y por último metemos estas matrices en el sumatorio:

Que equivale a introducir en Matlab:

VGL=(b-a)/2\*(d-c)/2\*sum(sum(C.\*UPrima.\*sqrt(R^2-UPrima.^2)))

A partir de lo que obtenemos:

Además, podemos calcular el valor analítico de la longitud Vanalitica=integral(g,a,b) integral(h,c,d) cuyo valor es:

Y a partir de esto, podemos calcular el error porcentual de cada método:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Trapecio | Simpson | Gauss-Legendre |
|  | 4.213583 | 1.563591 | 1.1685260 |

A partir del error podemos ver que la aproximación es peor que en las anteriores, y que el método que más se ajusta al valor de la función analítica es Gauss-Legendre en este caso.

**Rúbrica**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Una capa para Gastón | Descripción | Puntuación máxima  (puntos) | Peso  % |
| Criterio 1 | Calidad en la presentación. | 1 | 10% |
| Criterio 2 | Problema 1. Planteamiento y desarrollo. | 1 | 10% |
| Criterio 3 | Problema 1. Resultado (si criterio 2 consolidado). | 1.5 | 15% |
| Criterio 4 | Problema 2. Planteamiento y desarrollo. | 1 | 10% |
| Criterio 5 | Problema 2. Resultado (si criterio 4 consolidado). | 1.5 | 15% |
| Criterio 6 | Problema 3. Planteamiento y desarrollo. | 1.5 | 15% |
| Criterio 7 | Problema 3. Resultado (si criterio 6 consolidado). | 2.5 | 25% |
|  |  | **10** | **100 %** |

**Extensión** **máxima de la actividad:** 10 páginas, fuente Calibri 12 e interlineado 1,5.